

Лекция №1 (Теория упругости)

Введение

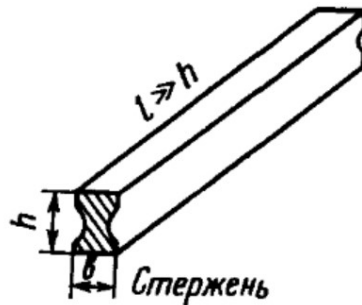
Инженер, имеющий дело с несущими конструкциями, должен обладать четким представлением об особенностях деформирования под нагрузкой тел различной формы и практически проводить их расчет на прочность и жесткость.

Эти вопросы изучаются в строительных вузах в курсах "Сопротивление материалов", "Строительная механика", "Теория упругости".

В сопротивлении материалов главным объектом изучения является стержень, что объясняется следующими причинами.

1. Стержень широко используется в строительстве в виде колонн, балок, элементов ферм, рам, арок и т.д.

2. Так как длина стержня значительно превосходит размеры поперечного сечения, то распределение сил упругости в объеме стержня оказывается относительно простым. Это позволяет получить достаточно простые и точные формулы для определения напряжений в произвольной точке стержня. Сравнительно легко, путем интегрирования ОДУ, решается задача определения перемещений.



Но среди элементов несущих конструкций встречаются и тела более сложной формы – пластины, оболочки, массивы деформируемого основания под сооружением и т.д.



Рис. 1. Конструкции, которые нельзя рассчитать методами сопротивления материалов

При расчете таких тел формулы сопротивления материалов обычно неприменимы. Даже в стержне, имеющем болтовые отверстия, распределение напряжений и деформаций вблизи отверстия уже нельзя найти по формулам сопротивления материалов.

Отметим также, что в сопротивлении материалов используются некоторые упрощающие предположения, например, гипотеза плоских сечений и др. В теории упругости это обычно не делается.

Лекция №1 (Теория упругости)

Таким образом теория упругости для строителей имеет два назначения:

1. Оценить точность и область применения решений тех задач, которые приближенно находятся методами сопротивления материалов.
2. Получить решения тех задач, которые вообще нельзя решить методами сопротивления материалов.

Расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) в точках упругих тел любой формы может быть выполнен методами теории упругости. При этом используется достаточно сложный математический аппарат (ДУ в ЧП, интегральные уравнения и т.д.). Точные решения конкретных практических задач в теории упругости удается получить крайне редко. Обычно находят приближенное решение, используя современные численные методы (МКЭ, МКР, метод граничных элементов и т.д.). Это стало возможным с широким внедрением в практику современных ЭВМ.

Отметим, что в настоящее время в технике широко используются материалы с более сложными, чем у упругих тел, механическими свойствами (упругопластические, вязкоупругие, композитные и т.д. материалы). Методы расчета таких тел изучаются в соответствующих курсах, читаемых, например, студентам механико-математических факультетов.

Предметом данного курса будет линейная теория упругости. Основной вклад в развитие теории упругости внесли следующие ученые: Галилей, Гук, братья Бернулли, Лейбниц, Эйлер, Лагранж, Навье, Коши и др.

Задача теории упругости. Основные допущения.

Рассмотрим тело известной формы, материал которого имеет упругие механические свойства. На тело действуют заданные нагрузки и наложены некоторые связи. Требуется определить напряжения, деформации и перемещения в точках тела.

В теории упругости используются следующие допущения.

1. Материал тела представляет собой сплошную среду.

То есть игнорируется атомно-молекулярная структура вещества. Это позволяет использовать математический аппарат непрерывных функций.

2. Материал тела считается однородным.

Это означает, что механические свойства в любой точке тела одинаковы. Это справедливо для металлов, менее справедливо для бетона, камня.

3. Материал тела предполагается изотропным, то есть тело во всех направлениях обладает одинаковыми свойствами.

Это верно для металлов. Для железобетона, древесины выполняется лишь приблизительно.

4. Перемещения точек тела считаются малыми по сравнению с его размерами, а деформации малыми по сравнению с единицей.

5. Будем рассматривать линейно упругие тела, для которых деформации прямо пропорциональны напряжениям. После снятия нагрузок тело восстанавливает первоначальные размеры и форму.

Упругостью называется свойство тела восстанавливать свои первоначальные размеры и форму после снятия внешней нагрузки.

Иногда добавляют ряд принципов:

Принцип независимости действия сил.

Лекция №1 (Теория упругости)

Результат воздействия на тело системы сил равен сумме воздействия тех же сил, прикладываемых последовательно и в любом порядке. (Вытекает из свойств 4 и 5).

Принцип отсутствия начальных напряжений.

До приложения внешних нагрузок в точках тела отсутствуют напряжения.

Принцип начальных размеров.

При составлении уравнений равновесия нагрузки прикладываются к недеформируемому телу.

Принцип Сен-Венана.

Если нагрузки действуют на небольшом участке поверхности тела, то в точках, достаточно удаленных от места приложения нагрузок, внутренние усилия не изменятся при замене нагрузок на статически эквивалентные.

Классификация сил

Все силы, действующие на тело, можно разделить на сосредоточенные (размерами площадки, по которой распределена нагрузка, пренебрегают и считают, что сила приложена в точке. Размерность: Н, кН=1000Н, МН= 10⁶Н. Пример – давление колеса вагона на рельс.

Поверхностные - приложены на поверхности тела (давление ветра, воды и т.д.). Размерность: Па=Н/м², кПа, Мпа.

Объемные (массовые) - силы тяжести, силы инерции и т.д. Размерность: Н/м³, кН/м³, МН/м³.

Понятие о напряжениях

Рассмотрим твердое тело, находящееся в равновесии под действием поверхностных и объемных сил. Для исследования внутренних сил, возникающих в теле, применим метод сечений. Мысленно разрежем тело произвольной плоскостью на две части А и В и часть В отбросим. В окрестности произвольной точки М плоскости сечения выделим элементарную площадку ΔA с центром в этой точке. Положение плоскости сечения в пространстве определяется направлением нормали ν , внешней по отношению к оставшейся части А. Главный вектор внутренних сил, действующих на площадку ΔA , обозначим ΔF .

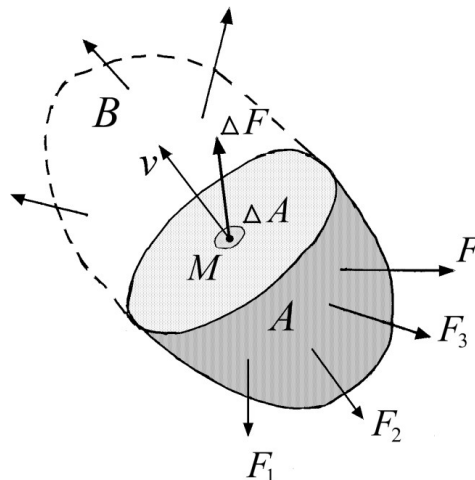


Рис. 2. Определение напряжений в точке С

Напряжением в т. М рассматриваемого сечения называется величина

$$P_v = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

Можно сказать и так: напряжение - это интенсивность внутренних усилий. Если через т. М провести сечение, отличное от показанного на рис. 2, то напряжение в этой точке будет иным. Совокупность напряжений на всех элементарных площадках с центром в т. М, называется напряженным состоянием в т. М. Напряжение - это вектор. Его можно разложить на составляющие по осям координат

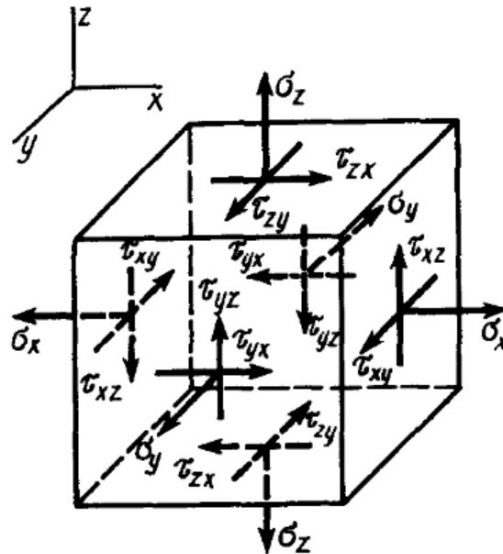
$$P_{vx} = \bar{X}_v, \quad P_{vy} = \bar{Y}_v, \quad P_{vz} = \bar{Z}_v.$$

Можно также разложить напряжение P_v на составляющие по направлению нормали к сечению σ - нормальное напряжение и лежащую в плоскости сечения τ - касательное напряжение.

Обычно рассматривают сечения, параллельные координатным плоскостям (координатные сечения), и касательное напряжение раскладывают на две составляющие вдоль осей координат, параллельных соответствующему координатному сечению.

Вырежем из рассматриваемого тела элементарный параллелепипед, ребра которого параллельны координатным осям, а их длина равна dx , dy , dz . На гранях этого параллелепипеда действуют нормальные напряжения σ_x , σ_y , σ_z и касательные напряжения τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , ...

Первый индекс в обозначениях касательных напряжений указывает ось, параллельно которой направлена внешняя нормаль к площадке, а второй индекс – ось, параллельно которой направлено само касательное напряжение. Поскольку у нормальных напряжений эти оси совпадают, то у них обычно оставляют один индекс.



Примем следующее правило знаков для напряжений: если внешняя нормаль к площадке имеет положительное (отрицательное) на-

правление, то напряжение положительно, если его направление совпадает с положительным (отрицательным) направлением соответствующей координатной оси. В соответствии с приведенным правилом знаков положительные нормальные напряжения являются растягивающими, а отрицательные — сжимающими.

Напряжения, так же как и поверхностная нагрузка, выражаются в Н/м² (Па).

Одноименные и параллельные напряжения, действующие на параллельных гранях бесконечно малого параллелепипеда, отличаются друг от друга на бесконечно малую величину и потому их можно считать одинаковыми.

Следовательно, на гранях параллелепипеда действуют три нормальных и шесть касательных напряжений, совокупность которых образует тензор напряжений

$$T_n = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

В строках тензора содержатся напряжения, направление которых параллельно соответственно координатным осям x , y , z , а в столбцах — напряжения, действующие на площадке, нормаль к которой параллельна оси x , или y , или z .

В сопротивлении материалов доказывается закон парности касательных напряжений, в соответствии с которым $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. Следовательно, тензор напряжений является симметричным относительно главной диагонали.

Наряду с напряжениями, действующими на площадках, нормальных к координатным осям x , y , z , часто возникает необходимость отыскания напряжений на площадках, произвольным образом наклоненных к указанным осям. Установим зависимость между проекциями полного напряжения на наклонной площадке $\bar{X}_v$, $\bar{Y}_v$, $\bar{Z}_v$ с напряжениями σ_x , τ_{xy} , . . .

Выделим в окрестности точки элементарный тетраэдр, три грани которого совпадают с координатными плоскостями, а четвертая грань

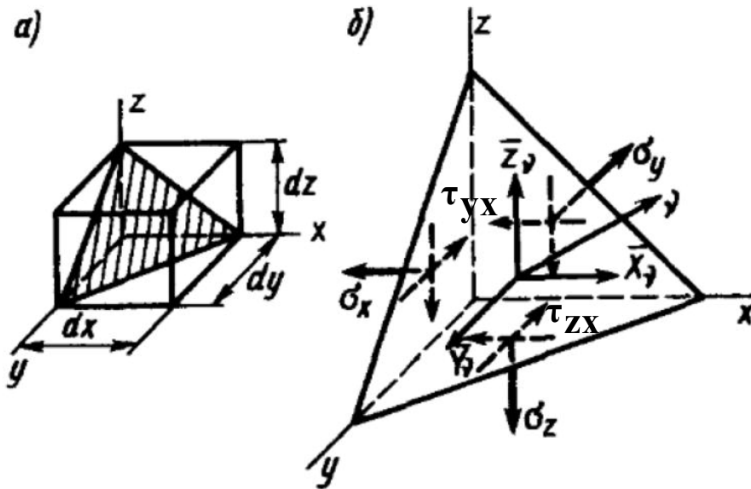


Рис. 3

образована секущей произвольной наклонной плоскостью (рис. 3, а, б). Ее положение в пространстве определяется нормалью ν .

Площадь наклонной грани равна dA , а площади других граней соответственно равны dA_x ,

dA_y , dA_z (индекс указывает направление нормали к площадке). Очевидно, что для этих площадей справедливы соотношения

$$dA_x = l dA, dA_y = m dA, dA_z = n dA. \quad (1)$$

Здесь $l = \cos(\nu, x)$, $m = \cos(\nu, y)$, $n = \cos(\nu, z)$ - направляющие косинусы.

Условие равновесия тетраэдра в проекции на ось x имеет вид

$$\bar{X}_\nu dA - \sigma_x dA_x - \tau_{yx} dA_y - \tau_{zx} dA_z = 0. \quad (2)$$

При записи уравнения равновесия удерживались только члены второго порядка малости ($dA_x = \frac{1}{2} dy dz$, ...). Поэтому горизонтальная проекция массовой силы не учитывается, так как она является величиной третьего порядка малости ($\frac{1}{6} X dx dy dz$). Из равенства (2) имеем

$$\bar{X}_\nu = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n. \quad (3)$$

Далее из уравнений равновесия в проекции на оси y, z нетрудно получить аналогичные выражения для $\bar{Y}_\nu$ и $\bar{Z}_\nu$. Однако те же самые равенства можно записать, воспользовавшись так называемым правилом круговой подстановки индексов, в соответствии с которым производится замена букв в последовательности, показанной на рис. 4.

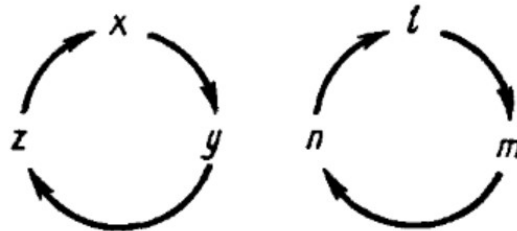


Рис. 4

В итоге приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_v &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ \bar{Y}_v &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ \bar{Z}_v &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В матричном виде эти соотношения можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_v \\ \bar{Y}_v \\ \bar{Z}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix},$$

или так

$$P_v = T_n \cdot v,$$

где

$$P_v = \begin{pmatrix} \bar{X}_v \\ \bar{Y}_v \\ \bar{Z}_v \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}.$$

По составляющим $\bar{X}_v$, $\bar{Y}_v$, $\bar{Z}_v$ можно получить значение нормального напряжения на той же площадке:

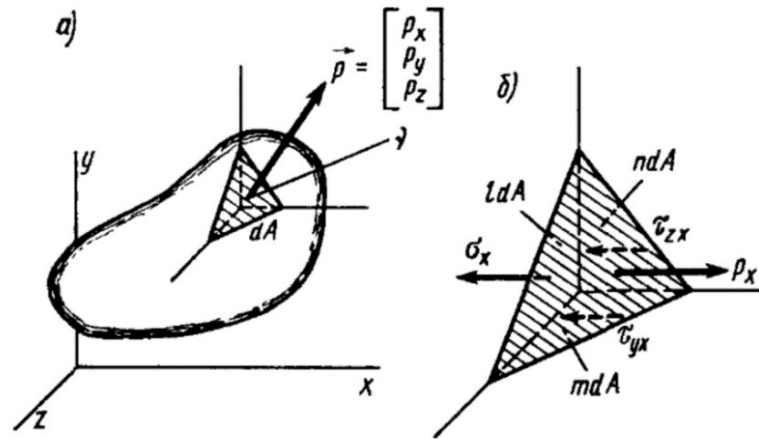
$$\begin{aligned} \sigma &= \bar{X}_v l + \bar{Y}_v m + \bar{Z}_v n = \\ &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \end{aligned} \quad (5)$$

Касательное напряжение можно найти по теореме Пифагора

$$\tau = \sqrt{P_v^2 - \sigma^2}.$$

Пусть теперь точка расположена на поверхности тела. Вырежем в ее окрестности элементарный тетраэдр сечениями, параллельными координатным плоскостям, и плоскостью касательной к поверхности тела в рассматриваемой точке.

На координатных сечениях будут действовать напряжения (показаны только компоненты, параллельные оси x), совпадающие с напряжениями в точке, а на наклонной грани поверхностные нагрузки $\vec{p} = [p_x, p_y, p_z]$, на которые в уравнениях (4) при составлении уравнений равновесия следует заменить напряжения $\bar{X}_v$, $\bar{Y}_v$, $\bar{Z}_v$. В итоге получим следующую систему уравнений



$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= p_x; \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n &= p_y; \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= p_z. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Эти уравнения выражают равновесие между поверхностной нагрузкой $\vec{p} = [p_x, p_y, p_z]$ и напряжениями в произвольной точке поверхности тела и называются условиями на поверхности.

Главные напряжения

Площадки, на которых нормальные напряжения достигают экстремума, а касательные напряжения равны нулю, называются **главными площадками**. А соответствующие нормальные напряжения – **главными напряжениями**.

Допустим, что нормаль к главной площадке образует с координатными осями x, y, z углы, косинусы которых равны l, m, n , причем очевидно должно выполняться геометрическое условие

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (6)$$

Главное напряжение на этой площадке обозначим σ , проекции которого на оси x, y, z определяются равенствами

$$\bar{X}_v = \sigma l, \quad \bar{Y}_v = \sigma m, \quad \bar{Z}_v = \sigma n.$$

С другой стороны, те же самые составляющие могут быть выражены через напряжения $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$ на основании уравнений (4). Тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma l &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ \sigma m &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ \sigma n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Представим систему уравнений (7) в виде

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0, \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{zy} n &= 0, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Эта система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных l, m, n является однородной. Решение ее может быть нулевым, что противоречит условию (6), и потому в рассматриваемой задаче места не имеет, и отличным от нуля, что, в свою очередь, предполагает равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов системы:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Раскрывая определитель, получим характеристическое уравнение относительно σ

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$I_2 = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Из высшей алгебры известно, что кубическое уравнение имеет три корня, причем в рассматриваемом случае эти корни являются действительными.

Тензор напряжений является симметричной матрицей, а все корни характеристического уравнения (собственные значения) симметричной матрицы — действительные числа.

Пронумеруем главные напряжения в порядке убывания: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Подставим любой из корней в уравнения (8) и используем два из них [третье уравнение на основании равенства (9) является следствием двух других], а также условие (6).

Решая совместно составленную таким образом систему трех уравнений, найдем значения направляющих косинусов l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2, 3$) главных площадок. Детальное исследование косинусов, полученных для каждого главного напряжения, показывает, что главные площадки взаимно ортогональны друг другу.

Через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные плоскости, на которые действуют главные нормальные напряжения. Следовательно, значения главных напряжений должны быть одними и теми же независимо от выбора исходной системы координат, в которой были определены компоненты тензора напряжений. Это означает, что коэффициенты I_1 , I_2 и I_3 кубического уравнения не меняют своего значения при изменении системы координат. Отсюда можно сделать вывод, что указанные коэффициенты являются соответственно первым (I_1), вторым (I_2) и третьим (I_3) инвариантами тензора напряжений по отношению к повороту координатных осей.

Особенно просто определяются значения инвариантов через главные напряжения. Очевидно, что

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad I_2 = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Сам тензор напряжений в главных осях имеет вид

$$T_n = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно констатировать, что напряженное состояние в точке вполне определяется главными напряжениями и ориентацией главных площадок.

Наибольшие касательные напряжения. Октаэдрическое касательное напряжение

Принимая в качестве исходных осей x, y, z главные оси x_1, x_2, x_3 , из соотношения (5) найдем нормальное напряжение на произвольной наклонной площадке с направляющими косинусами l, m, n :

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2.$$

Полное напряжение и его касательная составляющая равны

$$p^2 = \bar{X}_v^2 + \bar{Y}_v^2 + \bar{Z}_v^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2, \\ \tau^2 = p^2 - \sigma^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2. \quad (11)$$

Для отыскания площадок, на которых действуют наибольшие касательные напряжения, необходимо исследовать функцию τ на экстремум.

Из условия

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

выразим один из косинусов, например

$$n^2 = 1 - l^2 - m^2. \quad (12)$$

Подставим выражение (12) в (11) и продифференцируем функцию τ^2 один раз по l и по m .

Приравнявая эти производные нулю, получим два уравнения, из которых могут быть найдены значения косинусов, а далее из равенства (11) и сами значения экстремальных значений касательных напряжений.

Не останавливаясь подробно на выкладках, ограничимся формулировкой результатов. При объемном напряженном состоянии на трех площадках, расположенных под углом 45° к главным, действуют касательные напряжения (рис. 5, а, б, в), модули которых равны

$$\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \quad \tau_2 = \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|, \quad \tau_3 = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|.$$

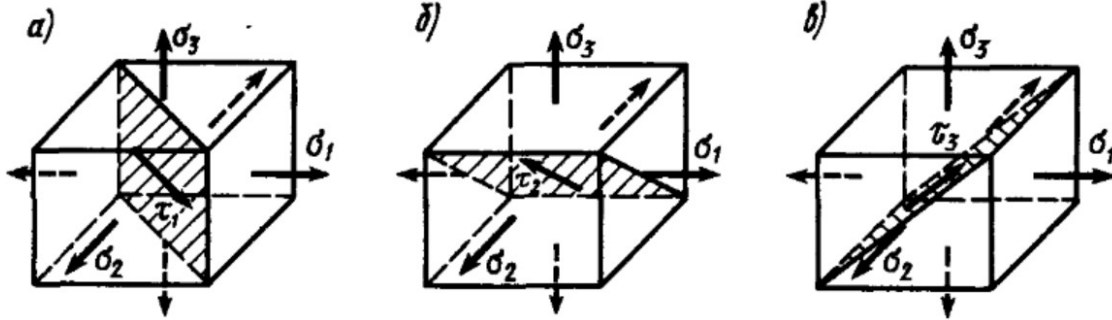


Рис. 5

Если соблюдаются неравенства $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Особый интерес представляют октаэдрические площадки, равнонаклоненные к направлениям трех главных напряжений, и действующие на них октаэдрические напряжения. Найдем эти напряжения.

Совместим координатные оси с направлениями главных напряжений. Тогда направляющие косинусы для октаэдрической площадки относительно выбранных координат, очевидно, равны

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из уравнений (4) имеем:

$$X_1 = \sigma_1 l = \sigma_1 / \sqrt{3}, \quad X_2 = \sigma_2 m = \sigma_2 / \sqrt{3}, \\ X_3 = \sigma_3 n = \sigma_3 / \sqrt{3}.$$

Полное напряжение, действующее на октаэдрической площадке, определяется выражением

$$p_{\text{окт}}^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) / 3,$$

а его нормальная и касательная составляющие соответственно равны

$$\sigma_{\text{окт}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 = \sigma_{\text{ср}},$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2},$$

где $\sigma_{\text{ср}}$ — среднее нормальное напряжение.

Полученные выражения одинаковы на всех восьми гранях октаэдра, показанного на рис. 6.

Разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор напряжений. Интенсивность напряжений

В дальнейшем при записи физических соотношений, т. е. зависимостей между напряжениями и деформациями для упругого, упруго-пластического или вязкоупругого материала в случае трехосного напряженного состояния потребуется представление тензора напряжений в виде двух составляющих:

$$T_{\text{н}} = \text{Ш}_{\text{н}} + D_{\text{н}},$$

где $\text{Ш}_{\text{н}}$ — шаровой тензор напряжений:

$$\text{Ш}_{\text{н}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{ср}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{ср}} \end{pmatrix};$$

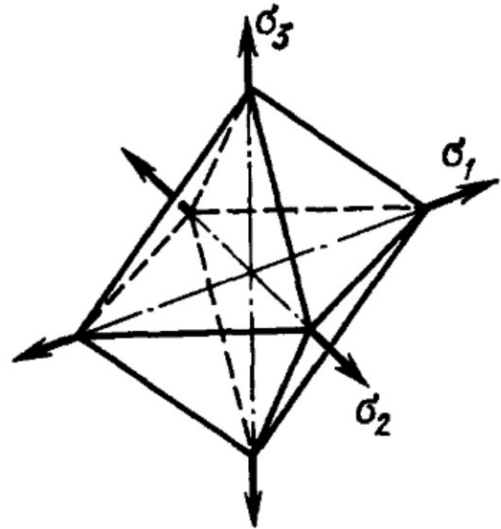


Рис. 6

D_H —девиатор напряжений:

$$D_H = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что шаровой тензор напряжений соответствует равно-
мерному всестороннему растяжению или сжатию в точке тела
(рис. 7).

Первый инвариант шарового тензора напряжений совпадает
с первым инвариантом тензора напряжений

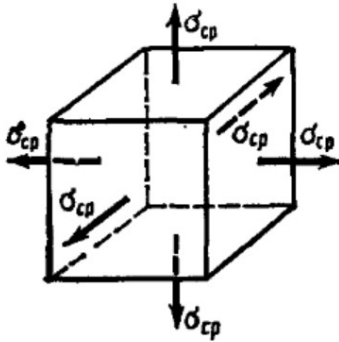


Рис. 7

$$I_1^H = 3\sigma_{cp} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

а первый инвариант девиатора напряжений
равен нулю.

Действительно,

$$\begin{aligned} I_1^D &= (\sigma_x - \sigma_{cp}) + (\sigma_y - \sigma_{cp}) + (\sigma_z - \sigma_{cp}) = \\ &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_{cp} = 0. \end{aligned}$$

Для определения второго инварианта
девиатора напряжений воспользуемся выра-
жением для второго инварианта тензора на-
пряжений, подставив в него вместо σ_x , σ_y , σ_z разности $\sigma_x - \sigma_{cp}$,
 $\sigma_y - \sigma_{cp}$, $\sigma_z - \sigma_{cp}$. После несложных преобразований получим

$$I_2^D = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)].$$

или в главных напряжениях

$$I_2^D = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

В теории пластичности широко используется понятие интен-
сивности касательных напряжений τ_n , которое формально определяется
как радикал из второго инварианта девиатора напряжений:

$$\begin{aligned} \tau_n &= \sqrt{I_2^D} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\tau_n = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_{окт}$.

Кроме интенсивности касательных напряжений τ_n часто поль-
зуются понятием интенсивности нормальных напряжений σ_n

Через главные напряжения σ_{ii} определяется следующим образом:

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

а через напряжения в произвольных осях —

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}.$$

Если разделить компоненты девиатора напряжений на интенсивность касательных напряжений, получим направляющий тензор напряжений

$$\bar{D}_{ii} = \frac{1}{\tau_{ii}} D_{ii} = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_{ii}} D_{ii}.$$

Характерно, что главные оси тензора напряжений совпадают с главными осями направляющего тензора напряжений. Можно показать, что направляющий тензор напряжений полностью определяется четырьмя компонентами, например его тремя главными направлениями и одним из главных напряжений или отношением любой пары главных напряжений между собой. Учитывая эти замечания, можно сказать, что тензор напряжений полностью определен, если известны его направляющий тензор напряжений $\bar{D}_{ii}$, среднее напряжение $\sigma_{ср}$ и октаэдрическое касательное напряжение $\tau_{окт}$, или интенсивность касательных напряжений τ_{ii} , или интенсивность напряжений σ_{ii} .